Приложна математика

пролетен триместър 2010/2011 уч.год.

12. ДИСКРЕТНИ СЛУЧАЙНИ ВЕЛИЧИНИ

Гл. ас. Христина Кулина

Задаване на дискретна случайна величина:

таблица на разпределение	*функция на разпределение*.
$\begin{array}{c\|ccccc} \xi & x_1 & x_2 & \dots & x_k & \dots \\ \hline p & p_1 & p_2 & \dots & p_k & \dots \end{array}$, x_i - възможни стойности, $p_i = P(\xi = x_i),\ \sum p_i = 1,$	$F_\xi(x) = P(\xi < x),\ x \in (-\infty, \infty).$ *Свойства:* 1) $0 \le F_\xi(x) \le 1$ за всяко x, 2) $F_\xi(x)$ *е ненамаляваща за всяко* x 3) $\lim\limits_{x\to-\infty} F_\xi(x) = 0,\ \lim\limits_{x\to\infty} F_\xi(x) = 1;$ 4) $P(a \le \xi < b) = F_\xi(b) - F_\xi(a)$

Числени характеристики:

<u>Математическо очакване:</u> $E\xi = \sum x_i p_i$,

ако C *е константа, то* $EC = C$.

ако C *е константа, то* $E(C\xi) = CE\xi$.

$$E(\xi_1 \pm \xi_2) = E\xi_1 \pm E\xi_2.$$

<u>Дисперсия:</u> $D\xi = E(\xi - E\xi)^2 = \sum (x_i - E\xi)^2 p_i$

$D\xi = E\xi^2 - (E\xi)^2$, където $E\xi^2 = \sum x_i^2 p_i$

$D\xi \geq 0$ *за произволна случайна величина*

$DC = 0$

$D(C\xi) = C^2 D\xi$

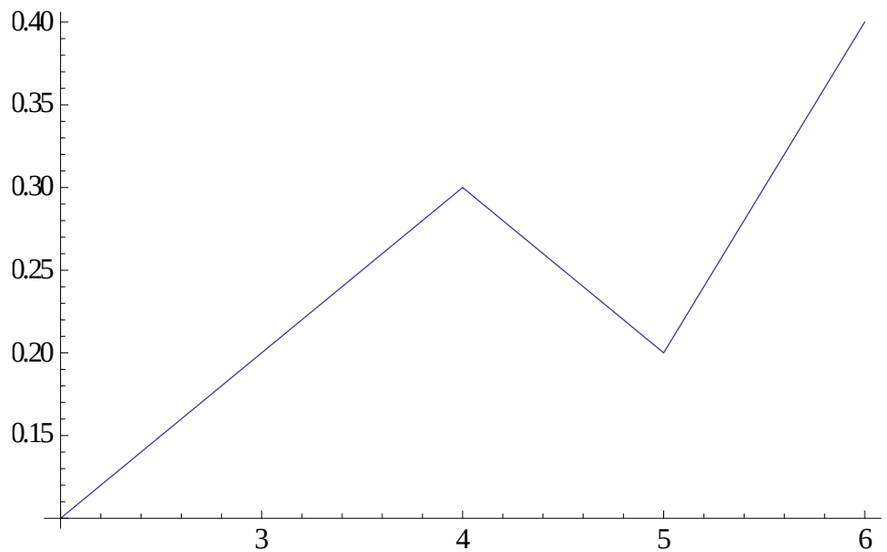
$D(\xi_1 \pm \xi_2) = D\xi_1 + D\xi_2$, *ако* ξ_1 *и* ξ_2 *са независими.*

<u>Средно квадратично отклонение :</u> $\sigma\xi = \sqrt{D\xi}$.

Задача 1. Дискретната сл.в. е зададена със закона на разпределение:

ξ_i	2	4	5	6
p_i	0,1	0,3	0,2	0,4

а) Постройте полигона на разпределение.



б) Намерете функцията на разпределение на сл.в.

$$F(x)=\begin{cases} 0, \text{ при } & x\le 2 \\ 0{,}1, \text{ при } & 2<x\le 4 \\ 0{,}4, \text{ при } & 4<x\le 5 \\ 0{,}6, \text{ при } & 5<x\le 6 \\ 1, \text{ при } & x>6 \end{cases}$$

в) Намерете $P(2\le\xi\le 5);\ P(\xi>2);$

$P(2\le\xi\le 5)=0{,}1+0{,}3+0{,}2=0{,}6;$

$P(\xi>2)=0{,}3+0{,}2+0{,}4=0{,}9;$

г) Намерете $E\xi, D\xi, \sigma\xi.$

$E\xi=2.0{,}1+4.0{,}3+5.0{,}2+6.0{,}4=4{,}8$

$$D\xi=E\xi^2-(E\xi)^2=2^2.0{,}1+4^2.0{,}3+5^2.0{,}2+6^2.0{,}4-(4{,}8)^2=\frac{832}{121}=1{,}56$$

$\sigma_\xi=\sqrt{D\xi}=1{,}249$

12.1. Биномно разпределена дискретна случайна величина

Случайната величина ξ има биномно разпределение с параметри **n** и **p**

($\xi \in B(n, p)$), ако възможните й стойности са $k = 0,1,\ldots,n$ и
$P(\xi = k) = P_n(k) = C_n^k p^k q^{n-k}$, където $(q = 1 - p)$.

$$E\xi = np,\ D\xi = npq.$$

ξ = {брой на "успехите" – сбъдванията, на дадено събитие А в n независими опита на Бернули, като във всеки опит вероятността занаспътване на А е $P(A) = p$ и остава неизменна}.

Задача 2. По канал се предава петбитово съобщение. Вероятността за грешка за всеки бит е една и съща и е равна на 1/3.

а) Намерете вероятността за това първия и третия бит в съобщението да е грешен, а останалите битове – не;

$$P(A) = \frac{1}{3}.\frac{2}{3}.\frac{1}{3}.\frac{2}{3}.\frac{2}{3} = \left(\frac{1}{3}\right)^2\left(\frac{2}{3}\right)^3.$$

б) Намерете вероятността за това втория и четвъртия бит в съобщението да е грешен, а останалите битове – не.

$$P(B)=\frac{2}{3}.\frac{1}{3}.\frac{2}{3}.\frac{1}{3}.\frac{2}{3}=\left(\frac{1}{3}\right)^2\left(\frac{2}{3}\right)^3.$$

в) Намерете вероятността за това два бита в съобщението да са грешни.

$$P_5(2)=C_5^2\left(\frac{1}{3}\right)^2\left(\frac{2}{3}\right)^3=10.\left(\frac{1}{3}\right)^2\left(\frac{2}{3}\right)^3.$$

г) Намерете з.р. на сл.в. ξ = {брой сгрешени битове в съобщението}.

ξ_i	0	1	2	3	4	5
p_i	$\frac{32}{243}$	$\frac{80}{243}$	$\frac{80}{243}$	$\frac{40}{243}$	$\frac{10}{243}$	$\frac{1}{243}$

д) Намерете $E\xi, D\xi, \sigma\xi$.

$$E\xi = np = 5.\frac{1}{3} = \frac{5}{3}$$

$$D\xi = npq = 5.\frac{1}{3}.\frac{2}{3} = \frac{5}{9},$$

$$\sigma_{\xi} = \sqrt{5/9} \approx 0{,}745$$

Задача 3. Зар се хвърля 10 пъти.

а) Напишете з.р. на сл. в. ξ = {брой паднали се шестици};

n = 10, p = 1/6, $\xi \in B(10,1/6)$

$$P(\xi = k) = P_n(k) = C_{10}^{k}\left(\frac{1}{6}\right)^{k}\left(\frac{5}{6}\right)^{10-k}$$, k = 0, 1, …, 10.

б) Намерете вероятността за това поне веднъж да се е паднала шестица;

$$P(\xi > 1) = 1 - P_{10}(0) = 1 - C_{10}^{0}\left(\frac{1}{6}\right)^{0}\left(\frac{5}{6}\right)^{10} = 1 - 0{,}162 = 0{,}838.$$

в) Намерете вероятността за това броя на шестиците да е не по-малко от 2 и не повече от 5.

$$P(2 \le \xi \le 5) = \sum_{k=2}^{5} P_{10}(k) = 0{,}513$$

г) Намерете $E\xi, D\xi, \sigma\xi$.

$$E\xi = np = 5.\frac{1}{3} = \frac{5}{3}$$

$$D\xi = npq = 5.\frac{1}{3}.\frac{2}{3} = \frac{5}{9},$$

$$\sigma_{\xi} = \sqrt{5/9} \approx 0{,}745$$

С Mathematica PDF[BinomialDistribution[n,p]]

12.2. Поасоново разпределена дискретна случайна величина

Казваме, че дискретната случайна величина ξ е разпределена по <u>закона на Поасон</u> с параметър $\lambda > 0$ ($\xi \in Po(\lambda)$), когато приема изброимо много стойности $0,1,2,\ldots,n,\ldots$ и $P(\xi = k) = p_k = \dfrac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}$, $k = 0,1,\ldots,n,\ldots$

Математическото очакване и дисперсията на величина $\xi \in Po(\lambda)$ са:

$E\xi = \lambda, \qquad D\xi = \lambda.$

Случаи на разпределение на Поасон:

1) $\xi \sim B(n, p)$ като параметърът е n много голям, а параметърът p – много малък (редки явления), тогава $\xi \in Po(\lambda)$ като $\lambda = np$.

2) ξ - брой на настъпващите за даден интервал от време елементарни събития при прост поток от събития интензивност λ.

Задача 4. Магазин получава 1000 бутилки минерална вода. Вероятността по пътя една бутилка да се повреди е 0,003. Да се намери вероятността по време на транспортирането да се повредят:

а) две бутилки;

б) по-малко от две бутилки;

в) повече от две бутилки;

г) поне от една бутилка;

n = 1 000, p = 0,003, $\lambda = np = 3$.

$\xi \in Po(3)$

а) $P(\xi = 2) = p_2 = \frac{3^2}{2!} e^{-3} = 0{,}224$

б) $P(\xi \le 2) = p_0 + p_1 = \frac{3^0}{0!}e^{-3} + \frac{3^1}{1!}e^{-3} = 0{,}199$

г) $P(\xi > 1) = 1 - P(\xi = 0) = 1 - \frac{3^0}{0!}e^{-3} = 1 - 0{,}0498 = 0{,}9502$

Задача 5. Средния брой повиквания в диспечерски пункт на такси за една минута е равно на 4. Намерете разпределението на сл.в. ξ = {брой повиквания за една минута}. Да се намери вероятността:

а) за една минута да няма повикване;

б) за една минута да има поне едно повикване;

в) за две минути да има 4 повиквания;

г) за две минути да има по-малко от 4 повиквания;

д) за две минути да има повече от 4 повиквания;

$\xi \in Po(4)$

а) $P(\xi = 0) = p_0 = \frac{4^0}{0!} e^{-4} = \frac{1}{e^4}$

б) $P(\xi > 1) = 1 - P(\xi = 0) = 1 - e^{-4} = 1 - \frac{1}{e^4}$

в) $P(\xi = 4) = \frac{8^4}{4!} e^{-8} = 0{,}0573$

г)
$P(\xi > 4) = 1 - P(\xi \le 4) = 1 - (P(\xi = 0) + P(\xi = 1) + P(\xi = 2) + P(\xi = 3) + P(\xi = 4) = 0{,}9004$

С Mathematica PDF[PoissonDistribution[λ]]

Допълнителни задачи:

.

1. На всеки 6 изстрела един стрелец улучва целта средно 5 пъти. Да се намери вероятността при осем изстрела той да улучи целта:

a. точно три пъти;
b. между 4 и 6 пъти;
c. повече от 6 пъти.

2. В магазин за мъжки обумки вероятността за това клиент да търси 42 номер е една и съща и е равна на 0,25. Намерете вероятността от 6 клиенти в магазина:
   a. Точно двама да търсят 42 номер;
   b. Петима да търсят 42 номер;
   c. Нито един на не иска 42 номер
   d. Поне един да тъси 42 номер.